CONCOURS SPECIAL 1979

CALCUL NUMÉRIQUE

DURÉE : 2 heures

Les tables de valeurs numériques, sans formules, et les calculatrices électroniques non imprimantes, sans cartes magnétiques, ni modules préprogrammés, sont autorisées.

I

On donne $(n+1)$ nombres réels distincts $x_0, x_1, \ldots, x_n$. i, j, k désignant des entiers compris entre 0 et n, on note δ_{ij} le symbole tel que $\delta_{ii} = 1$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

On rappelle que le polynôme D_i de degré n, tel que :

$$D_i(xj) = \delta_{ij} \text{ est : } D_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} .$$

1° On cherche les polynômes U_i et V_i de degré $\leqslant (2n+1)$ tels que, pour tous indices i, j, k :

$$U_i(x_k) = \delta_{ik} \text{ et } U'_i(x_k) = 0$$
$$V_i(x_k) = 0 \quad \text{et } V'_i(x_k) = \delta_{ik} .$$

U'_i et V'_i sont les dérivés de U_i et V_i.

a. Démontrer que l'on a nécessairement :

$$U_i(x) = r_i(x)\,[D_i(x)]^2$$
$$V_i(x) = s_i(x)\,[D_i(x)]^2$$

où r_i et s_i sont des polynômes de degré $\leqslant 1$.

b. Donner les expressions de r_i et s_i en fonction de x_i et de $D'_i(x_i)$.

2° Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Vérifier que le polynôme :

$$H(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,U_i(x) + \sum_{i=0}^{n} f'(x_i)\,V_i(x)$$

a la propriété (A) suivante :

(A) $\qquad \forall\, i \in [0, n] \qquad H(x_i) = f(x_i) \qquad \text{et} \qquad H'(x_i) = f'(x_i).$

Prouver que H est l'unique polynôme de degré $\leqslant 2n + 1$ ayant la propriété (A).

3° On se place dans le cas où $n = 1$ et $x_0 \neq x_1$.

Vérifier que l'on a :

$$U_0(x) = \frac{(2x - 3x_0 + x_1)\,(x - x_1)^2}{(x_1 - x_0)^3} \quad \text{et} \quad V_0(x) = \frac{(x - x_0)\,(x - x_1)^2}{(x_0 - x_1)^2}$$

et que l'on obtient U_1 et V_1 en permutant les indices 1 et 0.

.../...

II

Soit $f(x) = \sqrt{1 + e^{-\frac{1}{2}e^{-2x}}}$, où e est la base des logarithmes népériens. On se propose de trouver des valeurs approchées de $I = \int_0^1 f(x)\, dx$.

1° On approche la fonction f par un polynôme H_1 de degré $\leqslant 3$ ayant la propriété (A) du § I 2°., avec $x_0 = 0{,}25$ et $x_1 = 0{,}75$, c'est-à-dire :

$$H_1(x) = f(0{,}25)\, U_0(x) + f(0{,}75)\, U_1(x) + f'(0{,}25)\, V_0(x) + f'(0{,}75)\, V_1(x).$$

a. Donner l'expression de la dérivée f' de f.

b. Faire un tableau donnant les valeurs, avec 6 décimales, de $f(0{,}25)$, $f(0{,}75)$, $f'(0{,}25)$ et $f'(0{,}75)$.

2° Calculer, avec 6 décimales, les intégrales :

$$\int_0^1 U_i(x)\, dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 V_i(x)\, dx \quad \text{où} \quad i = 0 \text{ ou } 1.$$

Pour cela, on fera le changement de variable $X = x - 0{,}5$ et on utilisera les symétries des expressions algébriques.

3° Calculer, avec 6 décimales, l'intégrale $I_1 = \int_0^1 H_1(x)\, dx$, première valeur approchée de I.

4° Pour obtenir une meilleure approximation de I, on approche f sur [0; 0,5] et sur [0,5; 1] comme au § II.1°.

a. Sur [0 ; 0,5], on prend $x_0 = 0{,}125$ et $x_1 = 0{,}375$ et on considère le polynôme H_2 de degré $\leqslant 3$, ayant la propriété (A) du § I.2°.

En utilisant le changement de variable $X = x - 0{,}25$, calculer, avec 8 décimales :

$$\int_0^{0,5} U_i(x)\, dx \quad \text{et} \quad \int_0^{0,5} V_i(x)\, dx \text{ avec } i = 0 \text{ ou } 1.$$

b. Sur [0,5 ; 1], on prend $x_0 = 0{,}625$ et $x_1 = 0{,}875$ et on considère le polynôme H_3 de degré $\leqslant 3$ ayant la propriété (A) du § I.2°. Donner, sans faire de nouveaux calculs, les valeurs avec 8 décimales de :

$$\int_{0,5}^1 U_i(x)\, dx \quad \text{et} \quad \int_{0,5}^1 V_i(x)\, dx \text{ avec } i = 0 \text{ ou } 1.$$

5° *a.* Faire un tableau des valeurs de $f(x)$ et de $f'(x)$, avec 8 décimales, lorsque x prend les valeurs :

0,125 ; 0,375 ; 0,625 ; 0,875

b. Calculer, avec 8 décimales :

$$I_2 = \int_0^{0,5} H_2(x)\, dx + \int_{0,5}^1 H_3(x)\, dx,$$

seconde valeur approchée de I.

6° Un calcul donne la valeur exacte de I :

$$I = 1 + \sqrt{3} - \frac{1}{2}\operatorname{Log}(3 + 2\sqrt{3}) - \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{2}{e} + 1 + 2\sqrt{1 + e^{-1} + e^{-2}}\right) + \sqrt{1 + e^{-1} + e^{-2}} + \operatorname{Log}\left(2 + \frac{1}{e} + 2\sqrt{1 + e^{-1} + e^{-2}}\right).$$

Note de l'U.P.S. : cette formule est fausse.

Calculer I avec 8 décimales et comparer le résultat trouvé à I_1 et I_2.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail